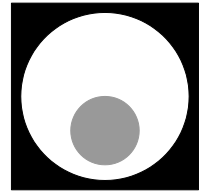




Универзитет у Крагујевцу  
Машински факултет Краљево



**ЗБИРКА РЕШЕНИХ ЗАДАТАКА ЗА  
ПРИЈЕМНИ ИСПИТ ИЗ  
МАТЕМАТИКЕ**

**Краљево, март 2012. године**

## **Публикација**

Збирка решених задатака за пријемни испит из математике

## **Издавач**

Машински факултет Краљево

## **За издавача**

Декан: др Новак Недић, ред. проф.

## **Задатке одабрао:**

Зоран Богићевић, дипл. мат., асистент,  
Машински факултет Краљево

## **Техничка обрада**

Владимир Ђорђевић, дипл инж. маш.  
Владимир Стојановић, дипл инж. маш.  
Марко Николић, дипл инж. маш.  
Бојан Белоица, дипл инж. маш.

## **Штампа**

Рижа, Краљево

## **Тираж**

600 примерака



## ИЗРАЗИ

**Задатак 1.1** Израчунати вредност израза:

$$(81^{-2^{-2}}):(81^{(-2)^{-2}})$$

**Решење:**

Дати израз једнак је  $a:b$ , где је:

$$a = 81^{-2^{-2}} = 81^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{81^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{(3^4)^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{3}$$

$$b = (81)^{(-2)^{-2}} = 81^{\frac{1}{(-2)^2}} = 81^{\frac{1}{4}} = (3^4)^{\frac{1}{4}} = 3$$

Одавде следи да је:

$$a:b = \frac{1}{3}:3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

**Задатак 1.2** Израчунати вредност израза:

$$\left(\frac{3}{5} + \frac{5}{3} : \frac{25}{111}\right)^{\frac{1}{3}}$$

**Решење:**

$$\left(\frac{3}{5} + \frac{5}{3} : \frac{25}{111}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3}{5} + \frac{37}{5}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{40}{5}\right)^{\frac{1}{3}} = (8)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{(2^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2}$$

**Задатак 1.3** Израчунати вредност израза:

$$\left[ \left( \frac{3}{7} + \frac{2}{3} : \frac{3}{5} \right) : \left( 13 + \frac{6}{7} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

**Решење:**

$$\begin{aligned} \left( \frac{3}{7} + \frac{2}{3} : \frac{3}{5} \right) : \left( 13 + \frac{6}{7} \right) &= \left( \frac{3}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} \right) : \left( \frac{91}{7} + \frac{6}{7} \right) = \left( \frac{3}{7} + \frac{10}{9} \right) : \frac{97}{7} = \\ &= \frac{3 \cdot 9 + 10 \cdot 7}{63} \cdot \frac{7}{97} = \frac{97}{63} \cdot \frac{7}{97} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Следи да је дати израз једнак:

$$\left( \frac{1}{9} \right)^{-\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

**Задатак 1.4** Израчунати вредност израза:

$$\left( \frac{1 + \sqrt{9 + \frac{25}{16}}}{3 + \frac{5}{4}} \right)^{-1}$$

**Решење:**

Пошто је

$$1 + \sqrt{9 + \frac{25}{16}} = 1 + \sqrt{\frac{9 \cdot 16 + 25}{16}} = 1 + \sqrt{\frac{169}{16}} = 1 + \frac{13}{4} = \frac{17}{4},$$

$$3 + \frac{5}{4} = \frac{17}{4},$$

то је дати израз једнак  $\left( \frac{17}{4} : \frac{17}{4} \right)^{-1} = \left( \frac{17}{4} \cdot \frac{4}{17} \right)^{-1} = 1^{-1} = 1$

**Задатак 1.5** Израчунати вредност израза:

$$\left[ \left( \frac{3}{16} : \left( 8 + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{25} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right]^{-4}$$

**Решење:**

$$\begin{aligned} \left[ \left( \frac{3}{16} : \left( 8 + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{25} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right]^{-4} &= \left[ \left( \frac{3}{16} : \left( \frac{24}{3} + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{25} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right]^{-4} = \\ &= \left[ \left( \frac{3}{16} : \frac{25}{3} + \frac{1}{25} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right]^{-4} = \left[ \left( \frac{3}{16} \cdot \frac{3}{25} + \frac{1}{25} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right]^{-4} = \left[ \left( \frac{9}{400} + \frac{16}{400} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right]^{-4} = \\ &= \left[ \left( \frac{1}{16} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right]^{-4} = \left[ \left( 2^{-4} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right]^{-4} = [2 - 1]^{-4} = 1^{-4} = 1 \end{aligned}$$

**Задатак 1.6** Израчунати вредност израза:

$$\left( \frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2} + \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} + 2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

**Решење:**

$$\begin{aligned} \left( \frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2} + \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} + 2} \right)^{\frac{1}{2}} &= \left[ \frac{(\sqrt{5} + 2)^2 + (\sqrt{5} - 2)^2}{(\sqrt{5} - 2) \cdot (\sqrt{5} + 2)} \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left( \frac{5 + 4\sqrt{5} + 4 + 5 - 4\sqrt{5} + 4}{5 - 4} \right)^{\frac{1}{2}} = 18^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{18^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{9 \cdot 2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{aligned}$$

**Задатак 1.7** Упростити израз:

$$\left( \frac{25}{a^2 + 5a + 25} - \frac{2a}{5 - a} - \frac{a^3 + 25a^2}{a^3 - 125} \right) \cdot \left( a - 5 + \frac{15a}{a - 5} \right) \text{ ако } a \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$$

**Решење:**

Код трансформација рационалних алгебарских израза, између осталог, се користе формуле:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, \quad a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3, \quad a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2);$$

Што се тиче самог израза, за  $a \neq 5$ , важи:

$$\text{Нека је притом } A = \frac{25}{a^2 + 5a + 25} - \frac{2a}{5 - a} - \frac{a^3 + 25a^2}{a^3 - 125}$$

$$\begin{aligned} \frac{25}{a^2 + 5a + 25} - \frac{2a}{5 - a} - \frac{a^3 + 25a^2}{a^3 - 125} &= \frac{25(a - 5) + 2a(a^2 + 5a + 25) - (a^3 + 25a^2)}{(a - 5)(a^2 + 5a + 25)} = \\ &= \frac{25a - 125 + 2a^3 + 10a^2 + 50a - a^3 - 25a^2}{(a - 5)(a^2 + 5a + 25)} = \frac{a^3 - 15a^2 + 75a - 125}{(a - 5)(a^2 + 5a + 25)} = \\ &= \frac{(a - 5)^3}{(a - 5)(a^2 + 5a + 25)} = \frac{(a - 5)^2}{a^2 + 5a + 25} \end{aligned}$$

$$\text{Нека је } B = a - 5 + \frac{15a}{a - 5}$$

$$a - 5 + \frac{15a}{a - 5} = \frac{(a - 5)^2 + 15a}{a - 5} = \frac{a^2 - 10a + 25 + 15a}{a - 5} = \frac{a^2 + 5a + 25}{a - 5}$$

Па је вредност почетног израза једнака  $A \cdot B$ :

$$A \cdot B = \frac{(a-5)^2}{a^2+5a+25} \cdot \frac{a^2+5a+25}{a-5} = a-5$$

**Задатак 1.8** Упростити израз:

$$\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$$

**Решење:**

$$\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} = \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{(a-b)(a+b)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{a+b}$$

**Задатак 1.9** Упростити израз:

$$\left( \frac{a+1}{a^2-4} + \frac{1-a^2}{a^3+8} \right) : \frac{1}{(a-1)^2+3}, \text{ за } |a| \neq 2$$

**Решење:**

$$\text{Нека је } A = \frac{a+1}{a^2-4} + \frac{1-a^2}{a^3+8}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{a+1}{a^2-4} + \frac{1-a^2}{a^3+8} = \frac{a+1}{(a-2)(a+2)} + \frac{1-a^2}{(a+2)(a^2-2a+4)} = \\ &= \frac{(a+1)(a^2-2a+4) + (1-a)(1+a)(a-2)}{(a-2)(a+2)(a^2-2a+4)} = \\ &= \frac{(a+1)[a^2-2a+4 + (1-a)(a-2)]}{(a-2)(a+2)(a^2-2a+4)} = \frac{(a+1)(a^2-2a+4+a-2-a^2+2a)}{(a-2)(a+2)(a^2-2a+4)} = \\ &= \frac{(a+1)(a+2)}{(a-2)(a+2)(a^2-2a+4)} = \frac{a+1}{(a-2)(a^2-2a+4)} \end{aligned}$$

Нека је  $B = \frac{1}{(a-1)^2 + 3} = \frac{1}{a^2 - 2a + 4}$

Тада је почетни израз једнак

$$A : B = \frac{a+1}{(a-2)(a^2-2a+4)} (a^2-2a+4) = \frac{a+1}{a-2}$$

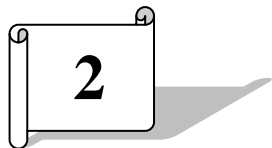
**Задатак 1.10** Израчнати вредност израза:

$$2^{3a} \cdot 3^{2a}$$

**Решење:**

$$2^{3a} \cdot 3^{2a} = (2^3)^a \cdot (3^2)^a = 8^a \cdot 9^a = (8 \cdot 9)^a = 72^a$$





## КВАДРАТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ И НЕЈЕДНАЧИНЕ

Једначина облика  $ax^2 + bx + c = 0$  где су  $a, b, c \in R$  и  $a \neq 0$  назива се квадратном једначином. Израз  $D = b^2 - 4ac$  је дискриминанта квадратне једначине. Ако је  $D > 0$  квадратна једначина има 2 реална и различита решења:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

За  $D = 0$  једначина има двоструко решење  $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ , а за  $D < 0$  решења једначине су комплексни бројеви.

**Задатак 2.1** Решити једначину:

$$1 + \frac{2x}{x+4} + \frac{27}{2x^2 + 7x - 4} = \frac{6}{2x-1}$$

**Решење:**

Једначину сведемо на облик  $\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0$  и  $B \neq 0$ . Раставимо квадратни трином  $2x^2 + 7x - 4$  на чиниоце:

$$2x^2 + 7x - 4 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 32}}{4} = \frac{-7 \pm 9}{4}$$

Пошто су решења  $x_1 = -4$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$ , квадратни трином се може записати као:

$$2x^2 + 7x - 4 = 2(x+4)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x+4)(2x-1)$$

Сада добијамо:

$$1 + \frac{2x}{x+4} + \frac{27}{(x+4)(2x-1)} - \frac{6}{2x-1} = 0$$

$$\frac{2x^2 + 7x - 4 + 2x(2x-1) + 27 - 6(x+4)}{(x+4)(2x-1)} = 0$$

$$\frac{2x^2 + 7x - 4 + 4x^2 - 2x + 27 - 6x - 24}{(x+4)(2x-1)} = 0$$

$$\frac{6x^2 - x - 1}{(x+4)(2x-1)} = 0$$

$$6x^2 - x - 1 = 0 \quad \text{и} \quad (x+4)(2x-1) \neq 0 \Rightarrow x \neq 4 \quad \text{и} \quad x \neq \frac{1}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{1 \pm 5}{12} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad x_2 = -\frac{1}{3}$$

Међутим, због условне једначине једино решење је  $x = -\frac{1}{3}$ .

**Задатак 2.2** Решити једначину:

$$x^2 - 2|x| - 3 = 0$$

**Решење:**

Размотрићемо следећа два случаја:

1. У случају  $x \geq 0$  једначина постаје  $x^2 - 2x - 3 = 0$ , њена решења су:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \quad x_1 = 3 \quad \text{и} \quad x_2 = -1.$$

Због ограничења једино решење је  $x = 3$ .

2. У случају за  $x < 0$ , једначина постаје  $x^2 + 2x - 3 = 0$  и њена решења су:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \quad x_1 = -3 \text{ и } x_2 = 1.$$

Због ограничења једино решење је  $x = -3$ .

Дакле, решења дате једначине су:  $x_1 = 3$  и  $x_2 = -3$ .

**Задатак 2.3** За које вредности јединог параметра  $m$  квадратна једначина  $x^2 - (m + 1)x + 2m - 1 = 0$  има двострука реална решења?

**Решење:**

$$x_1 = x_2 \in R \Leftrightarrow D = 0$$

$$D = [-(m + 1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m - 1) = 0$$

$$m^2 + 2m + 1 - 8m + 4 = 0, \quad m^2 - 6m + 5 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}, \quad m_1 = 1 \text{ и } m_2 = 5$$

**Задатак 2.4** Решити неједначину:

$$\frac{x - 4}{4x^2 - 4x - 3} > 0$$

**Решење:**

Дату неједначину је најлакше решити уз помоћ бројевних правих.

Одредимо нуле функције  $f(x) = 4x^2 - 4x - 3$  :

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{8} = \frac{4 \pm 8}{8}, \quad x_1 = -\frac{1}{2} \text{ и } x_2 = \frac{3}{2}$$

Сада добијамо:

$$\begin{array}{l}
 x - 4 \qquad \qquad \qquad \frac{- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +}{4} \\
 \\
 4x^2 - 4x - 3 \qquad \frac{+ \quad + \quad - \quad - \quad - \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +}{-\frac{1}{2} \qquad \frac{3}{2}} \\
 \\
 \frac{x - 4}{4x^2 - 4x - 3} \qquad \frac{- \quad - \quad + \quad + \quad + \quad - \quad - \quad - \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +}{-\frac{1}{2} \qquad \frac{3}{2} \qquad 4}
 \end{array}$$

Па је скуп решења дате неједначине  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \cup (4, +\infty)$ .

**Задатак 2.5** Одредити целобројна решења неједначине:

$$x^2 - 4x \leq 5$$

**Решење:**

Дату неједначина је еквивалентна неједначини  $x^2 - 4x - 5 \leq 0$ . Нуле квадратног тринома на левој старани су:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}, \quad x_1 = -1 \quad \text{и} \quad x_2 = 5$$

$$x^2 - 4x - 5 \qquad \frac{+ \quad + \quad + \quad - \quad - \quad - \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +}{-1 \qquad 5}$$

Према томе, дата неједначина је задовољена ако и само ако  $x \in [-1, 5]$ . Цели бројеви који припадају сегменту  $[-1, 5]$  су  $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ .

**Задатак 2.6** Одредити реалан параметар  $\alpha$  тако да је збир квадрата решења једначине  $x^2 + 3\alpha x + \alpha^2 = 0$  буде  $\frac{7}{4}$ .

**Решење:**

За решавање овог задатка потребне су нам Виетове формуле. Ако су  $x_1$  и  $x_2$  решења квадратне једначине  $ax^2 + bx + c = 0$  тада важи:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

За дату квадратну једначину добијамо:

$$x_1 + x_2 = -3\alpha, \quad x_1 \cdot x_2 = \alpha^2$$

Приметимо да се дати услов  $x_1^2 + x_2^2 = \frac{7}{4}$  може написати у облику  $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{7}{4}$  одакле се добија  $9\alpha^2 - 2\alpha^2 = \frac{7}{4}$ ,  $\alpha^2 = \frac{1}{4}$  па су решења  $\alpha_1 = \frac{1}{2}$  и  $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$ .

**Задатак 2.7** За које је вредности реалног броја  $m$  једно решење квадратне једначине  $(m-3)x^2 - (m+4)x + 3m = 0$  три пута веће од другог?

**Решење:**

На основу Виетових формула је  $x_1 + x_2 = \frac{m+4}{m-3}$  и  $x_1 \cdot x_2 = \frac{3m}{m-3}$ . У задатку се захтева да буде  $x_1 = 3x_2$ . Добијамо:

$$4x_2 = \frac{m+4}{m-3} \text{ и } 3x_2^2 = \frac{3m}{m-3} \quad \text{следи } x_2 = \frac{m+4}{4(m-3)}$$

$$3 \left( \frac{m+4}{4(m-3)} \right)^2 = \frac{3m}{m-3}$$

$$3 \frac{(m+4)^2}{16(m-3)^2} = \frac{3m}{m-3}$$

$$3(m^2 + 8m + 16) = 48m(m-3)$$

$$m^2 + 8m + 16 = 16m^2 - 48m$$

$$-15m^2 + 56m + 16 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-56 \pm \sqrt{4096}}{-30} = \frac{-56 \pm 64}{-30}$$

$$m_1 = -4 \text{ и } m_2 = -\frac{4}{15}$$

**Задатак 2.8** Одредити домен параметра  $a$  тако да је неједнакост  $\frac{x+a}{x^2+x+1} < \frac{x}{x^2+2x+3}$  тачна за свако  $x$ .

**Решење:**

Пошто за свако  $x \in \mathbb{R}$  важи  $x^2 + x + 1 > 0$  и  $x^2 + 2x + 3 > 0$ , после множења са  $(x^2 + x + 1)(x^2 + 2x + 3)$  дата неједнакост неће променити смисао. Дакле, дата неједнакост важи ако и само ако је  $(x+a)(x^2 + 2x + 3) < x(x^2 + x + 1)$  тј.:

$$(a+1)x^2 + (2a+2)x + 3a < 0$$

Последња неједнакост је тачна за свако  $x \in \mathbb{R}$  ако и само ако је  $a+1 < 0$  и  $D = 4(a+1)^2 - 12a(a+1) < 0$  што је испуњено ако и само ако  $a < -1$  и  $(a \in (-\infty, -1) \cup (1/2, +\infty))$  тј.  $a \in (-\infty, -1)$ .

**Задатак 2.9** Решити у скупу реалних бројева једначину:

$$(x-2)^6 - 19(x-2)^3 = 216$$

**Решење:**

Сменом  $t = (x-2)^3$  дата једначина се своди на квадратну  $t^2 - 19t - 216 = 0$ . Речења ове једначине су:

$$t_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{1225}}{2} = \frac{19 \pm 35}{2} \quad t_1 = -8 \quad \text{и} \quad t_2 = 27$$

Из  $(x-2)^3 = -8$  следи  $x-2 = -2$  односно  $x_1 = 0$ ,

а из  $(x-2)^3 = 27$  следи  $x-2 = 3$  односно  $x_2 = 5$ .

**Задатак 2.10** Одредити вредности параметра  $m$  за које једначина  $x^2 - (m+2)x + 2m + 1 = 0$  има комплексне корене који задовољавају релацију:  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \leq 1$ .

**Решење:**

Дискриминанта дате једначине је  $D = [-(m+2)]^2 - 4(2m+1) = m^2 - 4m$ . Решења су комплексна ако и само ако је  $D < 0$ , тј.:

$$D \quad \frac{+++ - - - - + + + + + + +}{0 \quad 4}$$

$$m \in (0,4) \dots \dots \dots (*)$$

Услов  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \leq 1$  је еквивалентан услову  $\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2} \leq 1$  тј.:  $\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2} \leq 1$ .  
 Како је према Вијетовим формулама  $x_1 + x_2 = m + 2$  и  $x_1x_2 = 2m + 1$ ,  
 следи да је:

$$\frac{(m + 2)^2 - 2(m + 1)}{2m + 1} \leq 1$$

односно после сређивања следи:

$$\frac{(m - 1)^2}{2m + 1} \leq 0$$

$$(m - 1)^2 \quad \frac{+++++ + + + + + + + + + + + +}{1}$$

$$2m + 1 \quad \frac{- - - - - + + + + + + + + + + +}{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{(m - 1)^2}{2m + 1} \quad \frac{- - - - - + + + + + + + + + + +}{-\frac{1}{2} \quad 1}$$

$$\text{Значи } m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \{1\} \dots \dots \dots (**)$$

Из израза (\*) и (\*\*) следи да је  $m = 1$ .

## ПОЛИНОМИ

Нека је полином  $P_n(x)$  дефинисан једнакошћу:  $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ , где су  $a_0, a_1, \dots, a_n$  ( $a_n \neq 0$ ) реални (или комплексни) бројеви, а  $x$  променљива. На основу Безуове теореме остатак  $R$  при дељењу полинома  $P_n(x)$  биномом  $x - a$  је  $P_n(a)$ . Неопходан услов да несводљиви разломак  $\frac{p}{q}$  ( $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ ) буде нула полинома  $P_n(x)$  са целобројним коефицијентима је да  $\frac{p}{a_n}$  ( $p$  дели  $a_n$ ) и  $\frac{pq}{a_0}$  ( $q$  дели  $a_0$ ).

**Задатак 3.1** Одредити коефицијенте полинома:

$$P_2(x) = ax^2 + bx + c, \text{ ако је } P_2(0) = 1, P_2(1) = 2, P_2(2) = 4$$

**Решење:**

Из датих услова следи:

$$P_2(0) = c = 1, \quad P_2(1) = a + b + c = 2, \quad P_2(2) = 4a + 2b + c = 4$$

Решавањем овог система једначина добија се:  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{1}{2}$ ,  $c = 1$ .

**Задатак 3.2** Одредити збир свих коефицијената полинома  $P(x)$  ако је:

$$P(x) = (x^3 + 2x^2 - x - 1)^{2000}$$

**Решење:**

Збир коефицијената полинома  $P(x)$  добија се као вредност полинома  $P$  за  $x = 1$ . Према томе је:

$$P(1) = (1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 - 1)^{2000} = 1$$

**Задатак 3.3** Одредити остатак при дељењу полинома  $P(x) = 4x^5 + 9x^3 + 19x + 90$  биномом  $x + 1$ .



**Решење:**

Према Безуовој теореме остатак дељења полиномом  $P(x)$  са  $x + 1$  је:

$$R = P(-1) = -4 - 9 - 19 + 90 = 60$$

**Задатак 3.4** Дат је полином  $P(x) = 2x^3 - 4tx^2 + tx - 2t$ . Одредити параметар  $t$  тако да полином  $P(x)$  буде дељив са  $x - 2$ .

**Решење:**

На основу Безуове теореме важи да је  $P(2) = 0$  :

$$2 \cdot 8 - 4t \cdot 4 + 2t - 2t = 0$$

$$16t = 16$$

$$t = 1$$

**Задатак 3.5** Дат је полином  $P(x) = 2x^3 - 4tx^2 + tx - 2t$ . Одредити параметар  $t$  тако да остатак при дељењу  $P(x)$  са  $x - 1$  буде једнак 7.

**Решење:**

Примењујући Безуову теорему добијамо  $P(1) = 7$  да је:

$$2 - 4t + t - 2t = 7$$

$$-5t = 5$$

$$t = -1$$

Једначина  $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$  назива се алгебарском једначином степена  $n$ . Нека су  $x_1, x_2, \dots, x_n$  решења те једначине. Везу између коефицијената и решења те једначине дају уопштене Виетове формуле:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + \dots + x_{n-1} \cdot x_n = \frac{a_2}{a_0}$$

.....

$$x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

**Задатак 3.6** Нека су  $x_1, x_2$  и  $x_3$  решења једначине  $125x^3 - 64 = 0$ .  
Одредити вредност израза  $x_1 x_2 x_3 - (x_1 + x_2 + x_3)$ .

**Решење:**

Користећи уопштене Виетове формуле добијамо:

$$a_0 = 125, \quad a_1 = a_2 = 0 \quad \text{и} \quad a_3 = -64 \quad \text{сада је:}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -125, \quad x_1 x_2 x_3 = \frac{64}{125} \quad \text{одакле следи да је}$$

$$x_1 x_2 x_3 - (x_1 + x_2 + x_3) = \frac{64}{125}.$$

**Задатак 3.7** Једначина  $x^3 + ax + b = 0$  ( $a, b \in R$ ) има решења  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 2$ . Одредити производ свих решења те једначине.

**Решење:**

Из чињенице да су  $x_1$  и  $x_2$  решења дате једначине следи:

$$1 + a + b = 0$$

$$8 + 2b + b = 0$$

Одакле је  $a = -7$  и  $b = 6$ . Следи да из уопштених Виетових формула добијамо:  $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -6$ .

**Задатак 3.8** Решити једначину:

$$\frac{x \cdot (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)}{x - 2 + |x - 2|} = 0$$

**Решење:**

Како важи да је:

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & x \geq 2 \\ -(x - 2), & x < 2 \end{cases}$$

Следи:

1. За  $x < 2$  добијамо:

$$\frac{x \cdot (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)}{x - 2 - (x - 2)} = 0$$

Дата једначина није дефинисана.

2. За  $x \geq 2$  добијамо:

$$\frac{x \cdot (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)}{2(x - 2)} = 0$$

Па је ова једначина еквивалентна систему:

$$x \cdot (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = 0 \text{ и } x \neq 2$$

Решења су  $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3, x_4 = 4$ . Међутим, због датог ограничења једина решења су  $x_1 = 3$  и  $x_2 = 4$ .

**Задатак 3.9** Ако је полином  $P(x) = x^4 + 6x^3 - 8x^2 + ax + b$  дељив триномом  $Q(x) = (x - 1)(x - 2)$ , одредити  $a$  и  $b$ .

**Решење:**

Ако је  $P(x)$  дељив са  $Q(x)$  онда је  $P(x)$  такође дељив и са  $x - 1$  и са  $x - 2$ . Према Безуовој теореми је  $P(1) = 0$  и  $P(2) = 0$ , одакле следи:

$$a + b = 1$$

$$2a + b = -32$$

Решење овог система је  $a = -33, b = 34$ .

**Задатак 3.10** Израчунати вредност израза:

$$a = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

**Решење:**

Степеновањем леве и десне стране једначине са 3 добија се:

$$a^3 = 20 + 14\sqrt{2} + 3 \left( \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} + 3 \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} \cdot \left( \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} \right)^2 + 20 - 14\sqrt{2}$$

$$a^3 = 40 + 3 \cdot \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} \cdot \left( \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} \right)$$

Како је израз у загради једнак  $a$ , добијамо:

$$a^3 = 40 + 3 \cdot \sqrt[3]{20^2 - (14\sqrt{2})^2} \cdot a$$

Односно:

$$a^3 - 6a - 40 = 0$$

Значи,  $a$  је решење последње једначине. Приметимо да су коефицијенти полинома на левој страни цели бројеви. Испитајмо да ли једначина има решења на скупу рационалних бројева. Ако је  $\frac{p}{q}$  решење једначине ( $p \in \mathbb{Z}$  и  $q \in \mathbb{N}$ ) онда  $\frac{p}{40}$  и  $\frac{q}{1}$ . Према томе  $P \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 8, \pm 10, \pm 20, \pm 40\}$  и  $q = \{1\}$ .

Методом покушаја тако се установљује да је  $a = 4$  једино решење. Дељењем леве стране једначине са  $a - 4$  добија се да је  $(a - 4)(a^2 + 4a + 10) = 0$ , како једначина  $a^2 + 4a + 10 = 0$  нема реалних решења ( $D = -24 < 0$ ), закључујемо да је  $a = 4$  једино реално решење, што значи да је

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$$



## АРИТМЕТИЧКИ И ГЕОМЕТРИЈСКИ НИЗОВИ

Низ бројева  $a_1, a_2, \dots, \dots, a_n$  је аритметички низ ако је :

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad (n \in \mathbb{N})$$

Број  $d$  назива се разлика аритметичког низа. Општи члан аритметичког низа рачуна се по формули:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

док се збир првих  $n$  чланова рачуна по формули:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n - 1)d)$$

Низ бројева  $a_1, a_2, \dots, \dots, a_n$  је геометријски низ ако је :

$$a_{n+1} = a_n \cdot q, \quad (n \in \mathbb{N}) \text{ и } a_1 \neq 0, \quad q \neq 0$$

Број  $q$  се назива количник геометријског низа. Општи члан геометријског низа рачуна се по формули:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

док се збир првих  $n$  чланова рачуна по формули:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

**Задатак 4.1** Аритметички низ дат је својим првим чланом  $a_1 = 10$  и разликом  $d = -5$ . Одредити првих шест чланова низа.

**Решење:**

Користећи се формулом за општи члан аритметичког низа добијамо:

$$a_2 = a_1 + d = 5$$

$$a_3 = a_1 + 2d = a_2 + d = 0$$

$$a_4 = a_1 + 3d = -5$$

$$a_5 = a_1 + 4d = -10$$

$$a_6 = a_1 + 5d = -15$$

**Задатак 4.2** Наћи осми члан аритметичког низа 1, 3, 5, 7, ... ..

**Решење:**

Обележимо са  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 3$ ,  $a_3 = 5$ ,  $a_4 = 7$ . Како је  $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = 2$  и користећи се формулом за општи члан аритметичког низа добијамо:

$$a_8 = a_1 + 7d = 1 + 7 \cdot 2 = 15$$

**Задатак 4.3** За аритметички низ са општим чланом  $a_n$  важи:

$$a_2 - a_6 + a_4 + 7 = 0 \quad \text{и}$$

$$a_8 - a_7 - 2a_4 = 0$$

Израчунати први члан и разлику овог низа.

**Решење:**

Користећи се формулом  $a_n = a_1 + (n - 1)d$  препишемо дати систем једначина:

$$a_1 + d - (a_1 + 5d) + a_1 + 3d + 7 = 0$$

$$a_1 + 7d - (a_1 + 6d) - 2(a_1 + 3d) = 0$$

Сада следи:

$$a_1 - d = -7$$

$$-2a_1 - 5d = 0$$

Решење овог система је  $a_1 = -5$  и  $d = 2$ .

**Задатак 4.4** Дат је први члан  $a_1 = 6$  и количник  $q = -\frac{1}{2}$  геометријског низа. Написати првих шест чланова тог низа.

**Решење:**

Користећи се формулом  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$  добијамо:

$$a_2 = a_1 \cdot q = -3$$

$$a_3 = a_1 \cdot q^2 = a_2 \cdot q = \frac{3}{2}$$

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 = -\frac{3}{4}$$

$$a_5 = a_1 \cdot q^4 = \frac{3}{8}$$

$$a_6 = a_1 \cdot q^5 = -\frac{3}{16}$$

**Задатак 4.5** Дат је општи члан геометријског низа  $a_n = \frac{5}{7^n}$ . Одредити први члан и количник тог низа.

**Решење:**

Први члан геометријског низа је  $a_1 = \frac{5}{7}$ . Како је  $a_2 = \frac{5}{7^2}$  то је:

$$q = \frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{5}{7^2}}{\frac{5}{7}} = \frac{1}{7}$$

**Задатак 4.6** Дат је први члан  $a_1 = -1$  и количник  $q = 3$  геометријског низа. Одредити индекс члана тог низа чија је вредност  $-81$ .

**Решење:**

Како је  $a_n = -81$  и  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$  имамо следећу једначину:

$$-81 = -1 \cdot 3^{n-1}$$

$$3^4 = 3^{n-1}$$

Па добијамо да је  $n = 5$ .

**Задатак 4.7** Збир трећег и седмог члана аритметичког низа је 6, а њихов производ је 8. Израчунати збир првих шеснаест чланова те прогресије.

**Решење:**

Према услову задатка је:

$$a_3 + a_7 = 6$$

$$a_3 \cdot a_7 = 8$$

Односно

$$2a_1 + 8d = 6$$

$$(a_1 + 2d) \cdot (a_1 + 6d) = 8$$

Из прве једначине следи да је  $a_1 = 3 - 4d$  и заменом у другу добијамо:

$$(3 - 4d + 2d) \cdot (3 - 4d + 6d) = 8$$

$$(3 - 2d) \cdot (3 + 2d) = 8$$

$$9 - 4d^2 = 8$$

$$d^2 = \frac{1}{4}$$

тако да имамо два решења:



$$d = \frac{1}{2}, \quad a_1 = 1 \quad \text{и}$$

$$d = -\frac{1}{2}, \quad a_1 = 5$$

У првом случају је:

$$S_{16} = \frac{16}{2} \left( 2 \cdot 1 + 15 \cdot \frac{1}{2} \right) = 76,$$

а у другом:

$$S_{16} = \frac{16}{2} \left( 2 \cdot 5 - 15 \cdot \frac{1}{2} \right) = 20,$$

**Задатак 4.8** Израчунати збир свих парних двоцифрених бројева.

**Решење:**

Низ парних двоцифрених бројева је аритметички низ са првим чланом  $a_1 = 10$  и разликом  $= 2$ . Таквих бројева има  $n = \frac{98-10}{2} + 1 = 45$  па је:

$$S = S_{45} = \frac{a_1 + a_{45}}{2} \cdot 45 = \frac{10 + 98}{2} \cdot 45 = 2430$$

**Задатак 4.9** Одредити четири узастопна члана геометријског низа ако је збир крајњих чланова једнак  $-49$ , а средњих  $14$ .

**Решење:**

Из услова задатка имамо:

$$a_1 + a_4 = -49 \quad \text{и}$$

$$a_2 + a_3 = 14$$

Односно:

$$a_1(1 + q^3) = -49$$

$$a_1q(1 + q) = 14$$

Добијамо:

$$\frac{a_1(1+q)(1-q+q^2)}{a_1q(1+q)} = -\frac{49}{14}$$

тј.:

$$1 - q + q^2 = -\frac{7}{2}$$

Решења ове једначине су:

$$q = 2 \quad \text{или} \quad q = -\frac{1}{2}$$

У првом случају је:

$$a_1 = 7, \quad a_2 = -14, \quad a_3 = 28, \quad a_4 = -56 .$$

а у другом је:

$$a_1 = -56, \quad a_2 = 28, \quad a_3 = -14, \quad a_4 = 7 .$$

**Задатак 4.10** Бројеви  $a_1, a_2$  и  $a_3$  чине геометријску прогресију. Ако је  $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 343$  и  $a_2 - a_1 = 5$ , одредити њихов збир.

**Решење:**

Из првог услова добијамо:

$$(a_1 \cdot q)^3 = 343 \quad \text{односно}$$

$$a_1 \cdot q = 7$$

Дакле  $a_2 = 7$ , па из другог услова следи да је  $a_1 = 2$ .

$$\text{Даље је } q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{7}{2} \quad \text{и} \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = a_1 \cdot \frac{1-q^3}{1-q} = \frac{67}{2}$$



## ПЛАНИМЕТРИЈА И СТЕРЕОМЕТРИЈА

**Задатак 5.1** Колике су странице правоугаоника чији је обим  $7,4 \text{ m}$ , а површина  $3 \text{ m}^2$ .

**Решење:**

Обим правоугаоника страница  $a$  и  $b$  је  $O = 2(a + b)$ , а површина је  $P = a \cdot b$ . Из услова задатка следи да је:

$$2(a + b) = 7,4$$

$$a \cdot b = 3$$

tj.

$$a = 3,7 - b$$

$$b(3,7 - b) = 3$$

Решимо последњу једначину:

$$-b^2 + 3,7b - 3 = 0$$

$$10b^2 - 37b - 30 = 0$$

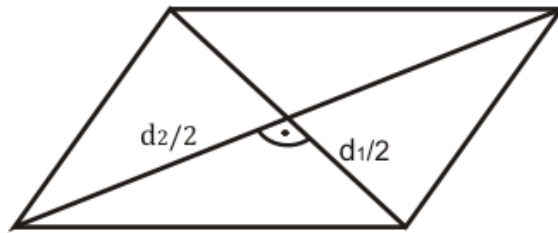
$$b_{1,2} = \frac{37 \pm \sqrt{169}}{20} = \frac{37 \pm 13}{20}$$

$$b_1 = 2,5 \quad b_2 = 1,2$$

У првом случају је  $b = 2,5 \text{ m}$  и  $a = 1,2 \text{ m}$ , а у другом  $b = 1,2 \text{ m}$  и  $a = 2,5 \text{ m}$ .

**Задатак 5.2** Одредити странице ромба површине  $16\text{cm}^2$  чији је однос дијагонала  $d_1:d_2 = 1:2$  .

**Решење:**



Како је површина ромба  $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$  и из услова задатка добијамо следећи систем:

$$\frac{d_1 \cdot d_2}{2} = 16$$

$$d_2 = 2d_1$$

Решења овог система су  $d_1 = 4\text{ cm}$  ,  $d_2 = 8\text{ cm}$  .

Из Питагорине теореме следи да је:

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$$

Односно:

$$a^2 = 4 + 16$$

Сада је:

$$a = 2\sqrt{5}\text{ cm}.$$

**Задатак 5.3** Одредити збир унутрашњих углова многоугла код којег је збир броја страница и броја дијагонала једнак 190.

**Решење:**

Како је број дијагонала конвексног многоугла једнак  $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$  добијамо једначину:

$$n + \frac{n(n-3)}{2} = 190$$

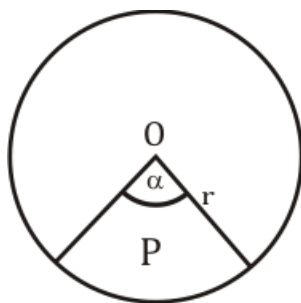
$$n^2 - n - 380 = 0$$

Једино решење које је природан број је  $n = 20$ , па је збир углова једнак:

$$S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ = 3240^\circ$$

**Задатак 5.4** Одредити централни угао који одговара исечку површине  $9,6\pi \text{ cm}^2$  ако је полупречник круга  $r = 12 \text{ cm}$ .

**Решење:**



Како је површина кружног исечка  $P = \frac{r^2 \pi \alpha}{360^\circ}$ , добијамо следећу једначину:

$$9,6\pi = \frac{12^2 \cdot \pi \alpha}{360^\circ}$$

Чије је решење  $\alpha = 24^\circ$ .

**Задатак 5.5** Одредити запремину лопте чија је површина  $P = 324\pi$ .

**Решење:**

Из формуле за површину лопте  $P = 4R^2\pi$  добијамо:

$$324\pi = 4R^2\pi$$

Сада је  $R = 9$ .

Одавде следи да је:

$$V = \frac{4}{3}R^3\pi = 972\pi$$

**Задатак 5.6** Обим основе ваљка је  $12\pi$  *cm*, а висина  $H = 16$  *cm*.  
Израчунати површину и запремину ваљка.

**Решење:**



Формуле за површину и запремину ваљка су:

$$P = 2\pi r(r + H)$$

$$V = r^2\pi H$$

Како је основа ваљка круг имамо да је:

$$2r\pi = 12\pi$$

То значи да је

$$r = 6 \text{ cm}$$

Према томе површина ваљка је:

$$P = 2\pi r(r + H) = 2\pi \cdot 6 \cdot (6 + 16) = 264\pi \text{ cm}^2$$

Односно запремина ваљка је:

$$V = r^2\pi H = 6^2\pi \cdot 16 = 576\pi \text{ cm}^3$$

**Задатак 5.7** Израчунати дужину полипречника уписане кружнице троугла ABC ако је  $a = 25 \text{ cm}$ ,  $b = 29 \text{ cm}$  и  $c = 36 \text{ cm}$ .

**Решење:**

Из формуле  $P_{\Delta ABC} = r \cdot s$  где је:

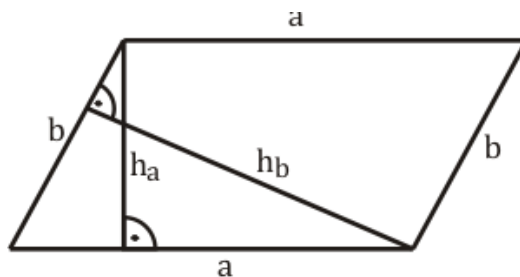
$$s = \frac{a + b + c}{2}, \quad \text{и} \quad P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Добијамо да је:

$$r = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} = \frac{\sqrt{45 \cdot 20 \cdot 16 \cdot 9}}{45} = 8 \text{ cm}$$

**Задатак 5.8** Површина паралелограма страница 10cm и 12 cm је  $60 \text{ cm}^2$ . Наћи висине овог паралелограма.

**Решење:**



Користећи формулу за површину паралелограма биће:

$$P = a \cdot h_a = b \cdot h_b$$

Добијамо да је:

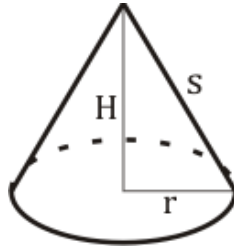
$$h_a = \frac{P}{a} = \frac{60}{10} = 6 \text{ cm}$$

односно

$$h_b = \frac{P}{b} = \frac{60}{12} = 5 \text{ cm}$$

**Задатак 5.9** Висина  $H$  и изводница  $s$  праве купе односе се као 3:5, а њена запремина је  $128\pi \text{ cm}^3$ . Одредити њену површину.

**Решење:**



На основу Питагорине теореме је:

$$s^2 = H^2 + r^2$$

Према услову задатка је:

$$s = \frac{5H}{3}$$

Па из ових једначина добијамо:

$$r^2 = \frac{16H^2}{9}$$

Такође је познато да је запремина купе:

$$V = 128\pi$$

Односно:

$$\frac{r^2\pi \cdot H}{3} = 128\pi$$

Сада је:

$$H = 6 \text{ cm}$$

На основу претходног следи да је:



$$r = 8 \text{ cm} \quad \text{и} \quad s = 10 \text{ cm}$$

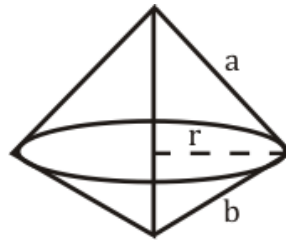
Површина купе је:

$$P = r\pi(r + s) = 144\pi \text{ cm}^2$$

**Задатак 5.10** Одредити површину тела које настаје обртањем правоуглог троугла око хипотенузе ако његове катете имају дужину  $a$  и  $b$ .

**Решење:**

Тело које се добија приказано је на слици:



То су две купе са спојеним основама па је:

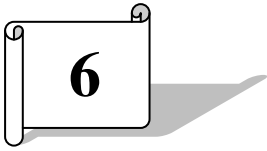
$$V = V_1 + V_2$$

Полупречник основе  $r$  је висина која одговара хипотенузи  $c$ , према томе:

$$r = h_c = \frac{2P}{c} = \frac{2 \frac{a \cdot b}{2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Збир висина  $H_1 + H_2$  ове две купе једнак је хипотенузи  $c$ , па имамо:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot H_1 + \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot H_2 = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot (H_1 + H_2) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)} \cdot \pi \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{a^2 b^2 \pi}{3\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$



## ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Експоненцијалне једначине су једначине код којих се непозната налази у изложиоцу.

Нека је  $a > 0, a \neq 1$ . Тада

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

ако и само ако је

$$f(x) = g(x)$$

**Задатак 6.1** Решити једначину:

$$9^{-\frac{1}{x}} = 3$$

**Решење:**

Дата једначина је дефинисана за  $x \neq 0$ . Довођењем на исте основе добијамо

$$(3^2)^{-\frac{1}{x}} = 3$$

$$3^{-\frac{2}{x}} = 3^1 \rightarrow -\frac{2}{x} = 1$$

$$x = -2$$

**Задатак 6.2** Решити једначину:

$$16^{\frac{1}{x}} = \sqrt{8^x}$$

**Решење:**

Дата једначина је дефинисана за  $x \neq 0$ . Довођењем на основу 2 добијамо:

$$(2^4)^{\frac{1}{x}} = \sqrt{(2^3)^x}$$

$$2^{\frac{4}{x}} = \sqrt{2^{3x}}$$

$$2^{\frac{4}{x}} = 2^{\frac{3x}{2}} \rightarrow \frac{4}{x} = \frac{3x}{2}$$

$$x^2 = \frac{8}{3}$$

$$x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

**Задатак 6.3** Решити једначину:

$$2^x \cdot 3^{x+1} = 18$$

**Решење:**

Користећи особину  $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$  добијамо

$$2^x \cdot 3^x \cdot 3 = 18$$

$$(2 \cdot 3)^x = 6$$

$$6^x = 6^1$$

$$x = 1$$

**Задатак 6.4** Решити једначину:

$$3^x \cdot 4^{x+1} = 576$$

**Решење:**

$$3^x \cdot 4^x \cdot 4 = 576$$

$$(3 \cdot 4)^x = \frac{576}{4}$$

$$12^x = 144$$

$$12^x = 12^2$$

$$x = 2$$

**Задатак 6.5** Решити једначину:

$$4^{x+1} + 4^x = 320$$

**Решење:**

$$4^x \cdot 4 + 4^x = 320$$

$$4^x \cdot (4 + 1) = 320 / : 5$$

$$4^x = 64$$

$$4^x = 4^3$$

$$x = 3$$

**Задатак 6.6** Решити једначину:

$$5^x + 3 \cdot 5^{x-2} = 140$$

**Решење:**

$$5^x + 3 \cdot 5^x \cdot 5^{-2} = 140$$

$$5^x \left(1 + \frac{3}{25}\right) = 140$$

$$5^x \cdot \frac{28}{25} = 140 / \cdot \frac{25}{28}$$

$$5^x = 125$$

$$5^x = 5^3$$

$$x = 3$$

**Задатак 6.7** Решити једначину:

$$10 \cdot 2^x - 4^x = 16$$

**Решење:**

Уведимо смену  $t = 2^x > 0$ . Добијамо:

$$10 \cdot t - t^2 = 16$$

$$t^2 - 10 \cdot t + 16 = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2}$$

$$t_1 = 2, t_2 = 8$$

$$2^x = 2$$

$$x_1 = 1$$

$$2^x = 8$$

$$2^x = 2^3$$

$$x_2 = 3$$

**Задатак 6.8** Решити једначину:

$$5^x - 24 = \frac{25}{5^x}$$

**Решење:**

Уведимо смену  $t = 5^x > 0$ . Добијамо:

$$t - 24 = \frac{25}{t} / \cdot t$$

$$t^2 - 24t + 25 = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{24 \pm \sqrt{576 + 100}}{2} = \frac{24 \pm \sqrt{676}}{2} = \frac{24 \pm 26}{2}$$

$$t_1 = \frac{24-26}{2} = -1 \text{ (ово решење не задовољава услов } t > 0)$$

$$t_2 = \frac{24 + 26}{2} = 25$$

$$5^x = 25$$

$$5^x = 5^2$$

$$x = 2$$

**Задатак 6.9** Решити једначину:

$$9^x + 6^x = 2 \cdot 4^x$$

**Решење:**

Трансформацијом једначине добијамо:

$$3^{2x} + 2^x \cdot 3^x - 2 \cdot 2^{2x} = 0 /: 2^{2x}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 = 0$$

Уведимо смену  $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x > 0$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$t_1 = \frac{-1-3}{2} = -2 \text{ (ово решење не задовољава услов } t > 0)$$

$$t_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^0 \Rightarrow x = 0$$

**Задатак 6.10** Решити једначину:

$$3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$$

**Решење:**

Трансформацијом једначине добијамо:

$$3 \cdot 4^{2x} + 2 \cdot 9^{2x} - 5 \cdot 4^x \cdot 9^x = 0 / : 9^{2x}$$

$$3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{2x} + 2 - 5 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x = 0$$

Уведемо смену  $t = \left(\frac{4}{9}\right)^x > 0$

$$3 \cdot t^2 - 5 \cdot t + 2 = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}$$

$$t_1 = \frac{5 - 1}{6} = \frac{2}{3}, t_2 = \frac{5 + 1}{6} = 1$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3}$$

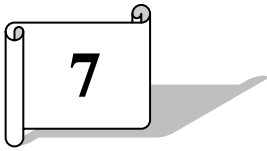
$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^1$$
$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x = 1$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{4}{9}\right)^0$$

$$x = 0$$



## ЛОГАРИТМИ И ЛОГАРИТАМСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ И НЕЈЕДНАЧИНЕ

$$x = \log_a b \leftrightarrow a^x = b \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0)$$

Основне особине логаритма су:

$$a^{\log_a b} = b, \quad \text{за } a > 0, a \neq 1, b > 0$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y, \quad \text{за } x > 0, y > 0, a > 0, a \neq 1$$

$$\log_a x^s = s \log_a x, \quad \text{за } a > 0, a \neq 1, x > 0, s \in R$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \quad \text{за } x > 0, y > 0, a > 0, a \neq 1$$

$$\log_a 1 = 0, \quad \text{за } a > 0, a \neq 1$$

$$\log_a a = 1, \quad \text{за } a > 0, a \neq 1$$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}, \quad \text{за } a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad \text{за } a > 0, b > 0, c > 0, a \neq 1, c \neq 1$$

$$\log_a x^s = \frac{1}{s} \log_a x, \quad \text{за } x > 0, a > 0, a \neq 1, s \neq 1$$

$$\log_a x = \log_{a^s} x^s, \quad \text{за } x > 0, a > 0, a \neq 1, s \neq 1$$



**Задатак 7.1** Израчунати  $x$  ако је  $\log_3 9 = x$ .

**Решење:**

Из дефиниције логаритма следи да је:

$$3^x = 9 \quad \text{односно} \quad x = 2.$$

**Задатак 7.2** Израчунати  $x$  ако је  $\log_x 125 = 3$ .

**Решење:**

Из дефиниције логаритма следи да је:

$$x^3 = 125, \quad x = \sqrt[3]{125}, \quad x = 5$$

**Задатак 7.3** Одредити  $x$  из једначине:

$$\log_2 x = \log_2 a + \log_2 b \quad (a, b > 0)$$

**Решење:**

Користећи особине логаритма добијамо:

$$\log_2 x = \log_2 ab$$

$$x = ab$$

**Задатак 7.4** Израчунати:

$$\log_8 \log_4 \log_2 16$$

**Решење:**

$$\log_8 \log_4 \log_2 2^4 = \log_8 \log_4 4 = \log_8 1 = 0$$

Једначина  $\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$  је еквивалентна систему:

$$a(x) > 0 \quad \text{и} \quad a(x) \neq 1 \quad \text{и} \quad f(x) > 0 \quad \text{и} \quad f(x) = g(x).$$

Реалан број  $x$  је решење неједначине  $\log_{a(x)}f(x) < \log_{a(x)}g(x)$  ако и само ако је решење бар једног од следећа два система неједначина:

1.  $a(x) > 0$  и  $0 < f(x) < g(x)$ .
2.  $0 < a(x) < 1$  и  $f(x) > g(x) > 0$ .

**Задатак 7.5** Решити једначину:

$$\log_{\frac{1}{3}}(x - 1) = 2$$

**Решење:**

Дата једначина је еквивалентна систему:

$$x - 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \quad \text{и} \quad x - 1 > 0$$

$$x = 1 + \frac{1}{9} \quad \text{и} \quad x > 1$$

$$x = \frac{10}{9} \quad \text{и} \quad x > 1$$

Тако да је решење  $x = \frac{10}{9}$ .

**Задатак 7.6** Решити неједначину:

$$\log_2(3x - 2) < 0$$

**Решење:**

Дата неједначина је еквивалентна неједначини:

$$\log_2(3x - 2) < \log_2 1$$

А ова систему:

$$0 < 3x - 2 < 1$$

Па је решење неједначине:

$$\frac{2}{3} < x < 1$$

**Задатак 7.7** Решити неједначину:

$$\log_{\frac{1}{5}} \frac{4x + 6}{x} \geq 0$$

**Решење:**

Дата неједначину напишемо у облику:

$$\log_{\frac{1}{5}} \frac{4x + 6}{x} \geq \log_{\frac{1}{5}} 1$$

Одавде добијамо:

$$0 < \frac{4x + 6}{x} \leq 1$$

Значи добили смо систем од две неједначине:

$$\frac{4x + 6}{x} > 0 \quad (1)$$

$$\frac{4x + 6}{x} \leq 1 \quad (2)$$

Решења једначине (1):

$$4x + 6 \quad \begin{array}{cccccccccccccccc} - & - & - & - & - & - & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + \\ \hline & & & & & & - & \frac{3}{2} & & & & & & & & & & \end{array}$$

$$x \quad \begin{array}{cccccccccccccccc} - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & + & + & + & + & + \\ \hline & & & & & & & & & & & & & 0 & & & & \end{array}$$

$$\frac{4x + 6}{x} \quad \begin{array}{cccccccccccccccc} + & + & + & + & + & + & - & - & - & - & + & + & + & + & + & + \\ \hline & & & & & & - & \frac{3}{2} & & & 0 & & & & & & \end{array}$$

Значи  $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (0, +\infty) \dots \dots \dots (*)$

Решења једначине (2):

$$\frac{4x + 6 - x}{x} \leq 0,$$

$$\frac{3x + 6}{x} \leq 0$$

$$3x + 6 \quad \frac{- - - - - + + + + + + + + + +}{-2}$$

$$x \quad \frac{- - - - - - - - - + + + + + + + +}{0}$$

$$\frac{3x + 6}{x} \quad \frac{+ + + + + - - - - + + + + +}{-2 \quad 0}$$

Значи  $x \in [-2, 0) \dots \dots \dots (**)$

Из израза (\*) и (\*\*) следи да је:

$$x \in \left[-2, -\frac{3}{2}\right)$$

**Задатак 7.8** Решити једначину:

$$\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$$

**Решење:**

Област дефинисаности је  $x > 0, x \neq 1$ , то јест  $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ . Користећи особине логаритма трансформишемо дату једначину:

$$\frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{2} \log_2 x + \frac{7}{6} = 0$$

Уведемо смену  $t = \log_2 x$ .

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{2}t + \frac{7}{6} = 0$$

$$-3t^2 + 7t + 6 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{-6} = \frac{-7 \pm 11}{-6}$$

$$t_1 = -\frac{2}{3}, \quad t_2 = 3$$

Враћајући смену добијамо да су:

$$\log_2 x = -\frac{2}{3}, \quad x_1 = 2^{-\frac{2}{3}} \quad \text{и}$$

$$\log_2 x = 3, \quad x_2 = 2^3 = 8 \quad \text{решења.}$$

**Задатак 7.9** Решити једначину:

$$\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$$

**Решење:**

Трансформишемо дату једначину:

$$\log_{2^4} x + \log_{2^2} x + \log_2 x = 7$$

$$\frac{1}{4} \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x + \log_2 x = 7$$

$$\frac{7}{4} \log_2 x = 7$$

$$\log_2 x = 4$$

Па је решење једначине:

$$x = 2^4 = 16$$

**Задатак 7.10** Решити неједначину:

$$\log_x 2 < 1$$

**Решење:**

Запишемо неједначину у облику:

$$\log_x 2 < \log_x x$$

Реалан број  $x$  је решење ове неједначине ако и само ако је решење бар једног од следећа два система неједначина:

$$(1) \quad 0 < x < 1, \quad 2 > x$$

$$(2) \quad x > 1, \quad 2 < x$$

Скуп свих решења првог система је:

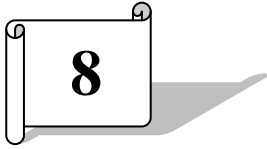
$$S_1 = (0,1)$$

А другог је:

$$S_2 = (2, +\infty)$$

Према томе:

$$x \in S_1 \cup S_2 = (0,1) \cup (2, +\infty)$$



## АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

**Задатак 8.1** Доказати да је троугао са теменима  $A(-3,-2)$ ,  $B(0,-1)$  и  $C(-2,5)$  правоугли.

**Решење:**

Растојање  $d$  између тачке  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$  рачуна се по формули :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

На основу ове формуле дужине страница троугла су:

$$|AB| = \sqrt{(0 + 3)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{10}$$

$$|BC| = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (5 + 1)^2} = 2\sqrt{10}$$

$$|AC| = \sqrt{(-2 - 3)^2 + (5 + 2)^2} = 5\sqrt{2}$$

Очигледно је  $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$ , па је троугао правоугли.

**Задатак 8.2** Одредити једначину праве која са осом  $Ox$  гради угао од  $135^\circ$  и која садржи тачку  $A(-3,-2)$ .

**Решење:**

Једначина праве која садржи тачку  $A(x_1, y_1)$  и има дати коефицијент правца  $k = tg\alpha$  има облик:

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

У овом случају коефицијент правца је  $k = tg135 = -1$ , па је једначина праве:

$$y + 2 = -(x + 3), \text{ односно:}$$

$$y = -x - 5$$

**Задатак 8.3** Одредити координате центра и дужину полупречника кружнице  $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ .

**Решење:**

Једначина кружнице са центром у тачки  $C(p,q)$  и полупречником  $r$  има облик:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

Како се кружница из задатка може написати у облику:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

То је центар  $C(2,-3)$ , и  $r=4$ .

**Задатак 8.4** Одредити једначину елипсе чије је растојање међу жижама једнако 8, а мале полуосе је  $b = 3$ .

**Решење:**

За  $a > 0$  и  $b > 0$  једначина елипсе има облик:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Растојање између жижа је  $2c$ , па је  $c=4$ . Даље је  $a^2 = b^2 + c^2 = 25$ , одакле следи да је  $a = 5$ . Тако да је једначина тражене елипсе:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

**Задатак 8.5** Израчунати ексцентрицитет хиперболе чија асимптота заклапа са осом  $Ox$  угао од  $60^\circ$ .

**Решење:**

Једначина хиперболе је једначина облика:



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Где су  $a > 0$  и  $b > 0$ . Праве  $y = \pm \frac{b}{a}x$  су асимптоте хиперболе. Број  $e = \frac{c}{a}$  назива се ексцентрицитет хиперболе, где је:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

У једначини асимптоте је:

$$k = \frac{b}{a} = \operatorname{tg}60^\circ$$

Па је  $b = \sqrt{3}a$ , одавде је ексцентрицитет хиперболе:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = 2$$

**Задатак 8.6** Одредити једначину тангенте на параболу  $y^2 = 16x$  која је нормална на праву  $4x + 2y + 7 = 0$ .

**Решење:**

Једначина параболе чија је оса симетрије оса  $Ox$  је:

$$y^2 = 2px \quad (p > 0)$$

Услов додира праве  $y = kx + n$  и параболе је  $p = 2kn$ . Коефицијент правца дате праве  $y = -2x - \frac{7}{2}$  је  $-2$  па је коефицијент правца тангенте  $k = \frac{1}{2}$ . Из услова додира даље се добијају:

$$8 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot n$$

$$n = 8$$

Па је једначина тангенте:

$$y = \frac{1}{2}x + 8$$

**Задатак 8.7** Одредити параметар  $k$  тако да права  $kx - 3y - 24 = 0$  буде тангента хиперболе  $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{36} = 1$ .

**Решење:**

Услов додира праве  $y = kx + n$  и хиперболе  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  је:

$$a^2k^2 - b^2 = n^2$$

Напишимо дату праву у облику:

$$y = \frac{k}{3}x - 8$$

Одакле добијамо да је коефицијент праве  $\frac{k}{3}$ , а  $n = -8$ .

Из услова додира следи:

$$36 \left( \frac{k^2}{9} - 1 \right) = 64$$

Следи да је:  $k = \pm 5$ .

**Задатак 8.8** Одредити растојање пресечне тачке правих  $4x - 3y = 0$  и  $y - x = 1$  од координатног почетка.

**Решење:**

Пресечну тачку добијамо решавањем система:

$$4x - 3y = 0$$

$$-x + y = 1$$

И то је тачка  $A(3,4)$ , а њено растојање од  $O(0,0)$  је  $d = \sqrt{9 + 16} = 5$ .

**Задатак 8.9** Одредити растојање тачке  $M(1,1)$  од центра круга  $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ .

**Решење:**

Једначина круга може се написати у облику:

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$$

Па је центар круга тачка  $C(2,2)$ . Тражено растојање је:

$$d = |CM| = \sqrt{(1 - 2)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{2}$$

**Задатак 8.10** Одредити параметре  $a$  и  $b$ , тако да праве  $4x - 3y = 0$  и  $y - x = 1$  буду тангенте елипсе  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

**Решење:**

Услов додира праве  $y = kx + n$  и елипсе  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  је:

$$a^2k^2 + b^2 = n^2$$

Ако се примени услов додира у односу на сваку праву:

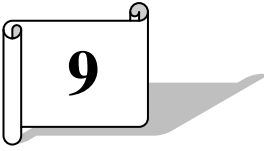
$$l_1: \quad y = -\frac{1}{4}x + 25, \quad k_1 = -\frac{1}{4}, \quad n_1 = 25$$

$$l_2: \quad y = -\frac{1}{9}x + \frac{25}{3}, \quad k_1 = -\frac{1}{9}, \quad n_1 = \frac{25}{3}$$

Добија се систем једначина:

$$\frac{1}{16}a^2 + b^2 = \left(\frac{25}{4}\right)^2 \quad ; \quad \frac{16}{81}a^2 + b^2 = \left(\frac{25}{3}\right)^2$$

Где је  $a > 0$  и  $b > 0$ . Решење система је  $(a, b) = (15, 5)$ .



## ТРИГОНОМЕТРИЈСКИ ИЗРАЗИ. ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ.

**Задатак 9.1** Израчунати вредност израза:

$$\sin \frac{\pi}{8}$$

**Решење:**

Користећи се формулом за полу углове тригонометријских функција

$$\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

добивамо

$$\sin \frac{\pi}{8} = \sin \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

**Задатак 9.2** Израчунати вредност израза

$$\cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ$$

**Решење:**

Користећи се формулом  $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$  и проширивањем израза са  $\frac{2 \sin 36^\circ}{2 \sin 36^\circ}$  добијамо

$$\begin{aligned} I &= \cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ \cdot \frac{2 \sin 36^\circ}{2 \sin 36^\circ} = \frac{2 \sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ}{2 \cdot \sin 36^\circ} \\ &= \frac{\sin 72^\circ \cdot \cos 72^\circ}{2 \cdot \sin 36^\circ} \cdot \frac{2}{2} = \frac{\sin(2 \cdot 72^\circ)}{4 \cdot \sin 36^\circ} = \frac{\sin 144^\circ}{4 \cdot \sin 36^\circ} \end{aligned}$$

Користећи се са  $\sin 144^\circ = \sin(180^\circ - 36^\circ) = \sin 36^\circ$  добијамо да је:

$$I = \frac{\sin 36^\circ}{4 \cdot \sin 36^\circ} = \frac{1}{4}$$

**Задатак 9.3** Израчунати:

$$\sin 3000^\circ$$

**Решење:**

Знајући да је период функције  $\sin x$  једнак  $T = 360^\circ$  добијамо

$$\begin{aligned}\sin 3000^\circ &= \sin(120^\circ + 8 \cdot 360^\circ) = \sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

јер је  $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$ .

**Задатак 9.4** Ако је  $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{4}$ , израчунати  $\tan \alpha$ .

**Решење:**

Користећи се формулом

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

и чињеницом да је  $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ , следи

$$\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\frac{\tan \alpha - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{\tan \alpha - 1}{1 + \tan \alpha} = \frac{3}{4} / \cdot 4 \cdot (1 + \tan \alpha)$$

$$4 \tan \alpha - 4 = 3 + 3 \tan \alpha \quad \Rightarrow \quad \tan \alpha = 7$$

**Задатак 9.5** Ако је  $\sin 1994^\circ = a$ ,  $\tan 1994^\circ = b$ ,  $\operatorname{ctg} 1994^\circ = c$ . Одредити  $\max(a, b, c)$  и  $\min(a, b, c)$ .

**Решење:**

На основу периодичности тригонометријских функција је

$$\begin{aligned} a &= \sin 1994^\circ = \sin(194^\circ + 5 \cdot 360^\circ) = \sin 194^\circ = \sin(180^\circ + 14^\circ) \\ &= -\sin 14^\circ \end{aligned}$$

$$b = \tan 1994^\circ = \tan(14^\circ + 11 \cdot 180^\circ) = \tan 14^\circ$$

$$c = \operatorname{ctg} 1994^\circ = \operatorname{ctg}(14^\circ + 11 \cdot 180^\circ) = \operatorname{ctg} 14^\circ$$

Очигледно је  $\min(a, b, c) = a$ .

Како је  $0 < b < 1$  следи да је  $\operatorname{ctg} 14^\circ = c = \frac{1}{b} > 1$ .

Према томе је  $\max(a, b, c) = c$ .

**Задатак 9.6** Решити једначину

$$2 \sin^2 x = 1$$

**Решење:**

Користећи се идентитетом  $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$ , добија се:

$$1 - \cos 2x = 1$$

$$\cos 2x = 0$$

$$\text{па је } 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{односно } x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$$

**Задатак 9.7** Решити једначину:

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0$$

**Решење:**

Уведимо смену  $t = \sin x$ , ( $-1 < t < 1$ )

$$2t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{-3 \pm 1}{4}$$

$$t_1 = \frac{-3 + 1}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$t_2 = \frac{-3 - 1}{4} = -1$$

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

Како је  $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$

$$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, \quad (k \in Z)$$

$$\sin x = -1$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad (n \in Z).$$

**Задатак 9.8** Решити једначину

$$2 \sin^2 x - \cos x = 1$$

**Решење:**

Користећи идентитет  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ , дата једначина се трансформише

$$2(1 - \cos^2 x) - \cos x = 1$$

$$-2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$$

Смена  $t = \cos x$ , ( $-1 < t < 1$ )

$$-2t^2 - t + 1 = 0 / \cdot (-1)$$

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$t_1 = \frac{-1 - 3}{4} = -1$$

$$t_2 = \frac{-1 + 3}{4} = \frac{1}{2}$$

Значи,  $\cos x = \frac{1}{2}$  или  $\cos x = -1$ .

Како је  $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$  то је

$$x_{1/2} = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

и

$$x = \pi + 2n\pi, \quad (n \in \mathbb{Z})$$

**Задатак 9.9** Решити једначину

$$2 \sin^2 x - 5 \sin x \cdot \cos x + 3 \cos^2 x = 0$$

**Решење:**

Како  $\cos x = 0$  не може бити решење дате једначине, поделимо је са  $\cos^2 x$

$$2 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 5 \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} + 3 \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$2 \tan^2 x - 5 \tan x + 3 = 0$$



Смена  $t = \tan x$

$$2t^2 - 5t + 3 = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{5 \pm 1}{4}$$

$$t_1 = 1, t_2 = \frac{3}{2}$$

$$\text{за } \tan x = 1 \rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in Z)$$

$$\text{за } \tan x = \frac{3}{2} \rightarrow x_2 = \arctg \frac{3}{2} + n\pi, (n \in Z)$$

**Задатак 9.10** Решити једначину:

$$\sin 6x - \sin 4x = 0$$

**Решење:**

Користећи се идентитетом  $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$ , добијамо

$$2 \cdot \cos \frac{6x + 4x}{2} \cdot \sin \frac{6x - 4x}{2} = 0$$

$$\cos 5x \cdot \sin x = 0$$

$$\cos 5x = 0$$

$$5x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x_1 = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}, (k \in Z)$$

$$\sin x = 0 \rightarrow x = n\pi, (n \in Z)$$

## ПРИМЕНА ТРИГОНОМЕТРИЈЕ У ПЛАНИМЕТРИЈИ

**Задатак 10.1** Ако у  $\triangle ABC$  важи  $\alpha = 2\beta$  и  $b = 2, c = 3$ , израчунати страницу  $a$ .

**Решење:**

Применом синусне теореме  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$ , добија се  $\frac{a}{\sin 2\beta} = \frac{b}{\sin \beta}$  одакле следи да је

$$\frac{a}{2\sin \beta \cos \beta} = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{4}$$

На основу косинусне теореме  $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$  следи

$$4 = a^2 + 9 - 2 \cdot a \cdot 3 \cdot \frac{a}{4}$$

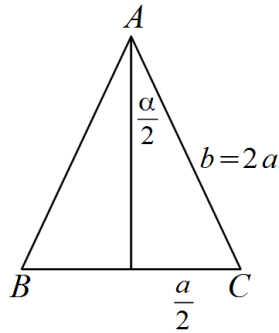
Одавде се добија да је  $a = \sqrt{10}$

**Задатак 10.2** У једнакокраком троуглу крак је два пута већи од основице. Ако је  $\alpha$  угао између кракова, израчунати  $\sin \frac{\alpha}{2}$ .

**Решење:**

Висина која одговара основици  $a$  је симетрала угла који образују краци, те је

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{2a} = \frac{1}{4}$$



**Задатак 10.3** Ако је у  $\triangle ABC$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = 2$  израчунати угао  $\beta$ .

**Решење:**

Применом синусне теореме добија се

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\sin \beta}$$

Па је  $\sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , одакле следи да постоје два решења  $\beta_1 = 45^\circ$  или  $\beta_2 = 135^\circ$ .

**Задатак 10.4** Ако у  $\triangle ABC$ , површине  $P = 6\sqrt{3}$ , странице  $a = 3$  и  $b = 7$  заклапају туп угао, одредити трећу страницу.

**Решење:**

Како је површина троугла

$$P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma$$

Следи да је

$$6\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 \cdot \sin \gamma$$

$$\sin \gamma = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

Даље је

$$\cos \gamma = -\sqrt{1 - \sin^2 \gamma} = -\sqrt{1 - \frac{48}{49}} = -\frac{1}{7}$$

Према косинусној теореме је

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

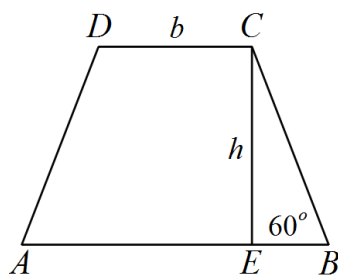
$$c^2 = 9 + 49 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)$$

$$c^2 = 64$$

$$c = 8$$

**Задатак 10.5** У трапезу  $ABCD$  је  $AB = 9, AD = BC = 4, \angle ABC = 60^\circ$  израчунати површину трапеза.

**Решење:**



Нека је  $CE = h$  висина трапеза. У правоуглом троуглу  $BEC$  је  $\sin 60^\circ = \frac{|CE|}{|BC|}$  па је  $h = |CE| = 2\sqrt{3}$ .

Такође је  $\cos 60^\circ = \frac{|BE|}{|BC|}$ , одакле следи да је  $|BE| = 2$ . Како је трапез једнакокрак, па је

$$b = |CD| = |AB| - 2|BE| = 5.$$

Сада је

$$m = \frac{a + b}{2} = \frac{9 + 5}{2} = 7$$

$$\text{па је површина трапеца } P = m \cdot h = 14\sqrt{3}.$$

**Задатак 10.6** У троуглу  $\Delta ABC$  је  $\alpha = 30^\circ$ ,  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = 2$ . Одредити остале углове троугла.

**Решење:**

Из синусне теореме је

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

одакле следи да је

$$\sin \beta = \frac{b}{a} \sin \alpha$$

$$\sin \beta = \frac{2}{\sqrt{2}} \sin 30^\circ$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

па је

$$\beta_1 = 45^\circ \qquad \beta_2 = 135^\circ$$

$$\gamma_1 = 105^\circ \qquad \gamma_2 = 15^\circ$$

**Задатак 10.7** У троуглу  $ABC$  дато је  $\alpha = 45^\circ, \beta = 60^\circ$  и полупречник описаног круга  $R = 2\sqrt{6}$ . Одредити остале основне елементе без употребе таблица.

**Решење:**

Најпре ћемо наћи угао  $\gamma$ :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ)$$

$$\gamma = 75^\circ$$

Искористићемо синусну теорему

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R \rightarrow a = 2R \sin \alpha$$

$$a = 2 \cdot 2\sqrt{6} \sin 45^\circ$$

$$a = 4\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$$

$$a = 4\sqrt{3}$$

$$\frac{b}{\sin \beta} = 2R \rightarrow b = 2R \sin \beta$$

$$b = 2 \cdot 2\sqrt{6} \sin 60^\circ$$

$$b = 4\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{18} = 6\sqrt{2}$$

$$b = 6\sqrt{2}$$

$$\frac{c}{\sin \gamma} = 2R \rightarrow c = 2R \sin \gamma$$

$$c = 2 \cdot 2\sqrt{6} \sin 75^\circ$$

$$c = 4\sqrt{6} \cdot \sin(45^\circ + 30^\circ)$$

$$c = 4\sqrt{6} \cdot (\sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ)$$

$$c = 4\sqrt{6} \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \right)$$

$$c = 2 \cdot (3 + \sqrt{3})$$

**Задатак 10.8** Одредити страницу  $b$  троугла  $ABC$  ако су његове странице  $a = 2\sqrt{3}$   $cm$ ,  $c = \sqrt{6}$   $cm$  и угао  $\beta = 105^\circ$ .

**Решење:**

Овде ћемо употребити косинусну теорему

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

Одредимо  $\cos 105^\circ$

$$\begin{aligned} \cos 105^\circ &= \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(1 - \sqrt{3})}{4} \end{aligned}$$

$$b^2 = (2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}(1 - \sqrt{3})}{4}$$

$$b^2 = 12 + 6 - 6 \cdot (1 - \sqrt{3})$$

$$b^2 = 12 + 6 - 6 + 6\sqrt{3}$$

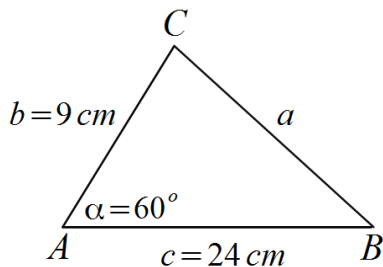
$$b^2 = 12 + 6\sqrt{3}$$

$$b^2 = (3 + \sqrt{3})^2$$

$$b = 3 + \sqrt{3}$$

**Задатак 10.9** У троуглу  $ABC$  дато је  $AB = 24 \text{ cm}$ ,  $AC = 9 \text{ cm}$  и угао  $\alpha = 60^\circ$ . Одредити без употребе таблица, страницу  $BC$  и полупречник описане кружнице.

**Решење:**



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$a^2 = 9^2 + 24^2 - 2 \cdot 9 \cdot 24 \cdot \cos 60^\circ$$

$$a^2 = 81 + 576 - 2 \cdot 9 \cdot 24 \cdot \frac{1}{2}$$

$$a^2 = 441$$

$$a = \sqrt{441}$$

$$a = 21 \text{ cm}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R \rightarrow \frac{21}{\sin 60^\circ} = 2R$$

$$\frac{21}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$



$$2R = \frac{42}{\sqrt{3}}$$

$$R = \frac{21}{\sqrt{3}} \text{ рационалишемо}$$

$$R = \frac{21}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$R = \frac{21\sqrt{3}}{3}$$

$$R = 7\sqrt{3} \text{ cm}$$

**Задатак 10.10** У троуглу  $ABC$  разлика страница  $a$  и  $b$  једнака је  $3 \text{ cm}$ , угао  $\gamma = 60^\circ$  и полупречник описане кружнице  $R = \frac{7\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$ . Одредити странице троугла  $ABC$ .

**Решење:**

Како је

$$\frac{c}{\sin \gamma} = 2R \rightarrow c = 2R \sin \gamma$$

$$c = 2 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{3} \cdot \sin 60^\circ$$

$$c = 2 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$c = 7 \text{ cm}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$7^2 = (b + 3)^2 + b^2 - 2b(b + 3) \cos 60^\circ$$

$$49 = (b + 3)^2 + b^2 - 2b(b + 3) \frac{1}{2}$$

$$49 = b^2 + 6b + 9 + b^2 - b^2 - 3b$$

$$b^2 + 3b - 40 = 0$$

$$b_{1/2} = \frac{-3 \pm 13}{2}$$

$$b_1 = 5$$

$b_2 = -8$  (ово није решење јер не може дужина странице да буде негативан број)

Дакле  $b = 5$

$$a = b + 3$$

$$a = 5 + 3$$

$$a = 8 \text{ cm}$$

## САДРЖАЈ

|   |    |
|---|----|
| 1. Изрази.....  | 3  |
| 2. Квадратне једначине и неједначине .....                  | 9  |
| 3. Полиноми.....  | 16 |
| 4. Аритметички и геометријски низови .....                  | 21 |
| 5. Планиметрија и стереометрија .....                       | 27 |
| 6. Експоненцијалне једначине .....                          | 34 |
| 7. Логаритми и логаритамске једначине и неједначине .....   | 40 |
| 8. Аналитичка геометрија.....                               | 47 |
| 9. Тригонометријски изрази. Тригонометријске једначине..... | 52 |
| 10. Примена тригонометрије у планиметрији .....             | 58 |

